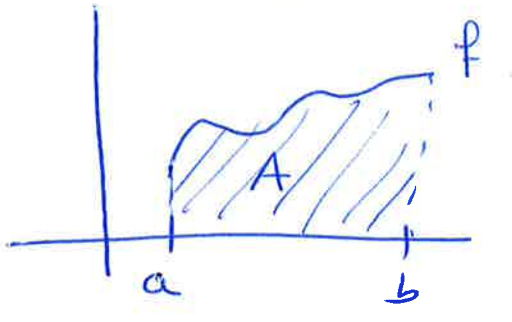
TEMAS 9-10: INTEGRAL DE RIEMANN. CALCULO DE PRIMITIVAS

INTRODUCCIÓN. ORIGEN HISTÓRICO

Motivaciones:

1) Buscar la operación inversa a la derivación, es decir, dada $f(x)$ encontrar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$. F se llama primitiva de f.
Newton-Leibniz. Siglo XVII.

2) Cálculo de áreas, es decir, dada $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, con $f(x) \geq 0$, calcular el área comprendida entre la gráfica de f y el eje OX, entre los puntos a y b.



Riemann, en el siglo XIX, resolvió este problema expresando dicha área como un límite de la suma de áreas de rectángulos asociados a f. Este concepto de integración es el que estudiaremos en este tema.
A principios del siglo XX, Henri Lebesgue introdujo un nuevo concepto de integración que mejoraba la definición dada por Riemann.

La integral de Lebesgue es esencial en Matemáticas "puras" pero no lo es en casi la totalidad de cálculos que se hacen en Ingeniería. Por ello nos limitaremos a estudiar la integral de Riemann.

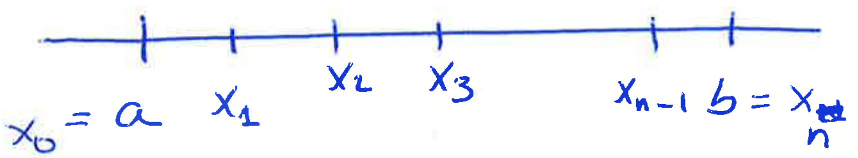
DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua.

Veamos cómo se puede calcular el área comprendida entre f y el eje OX entre los puntos a y b.

Dado que sabemos que el área de un rectángulo es su base por su altura, la idea básica consiste en aproximar el área que queremos calcular por la suma de las áreas de determinados rectángulos convenientemente elegidos. Para ello, empezamos por descomponer el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos

$$[a,x_1],[x_1,x_2],\dots,[x_{n-1},b]$$

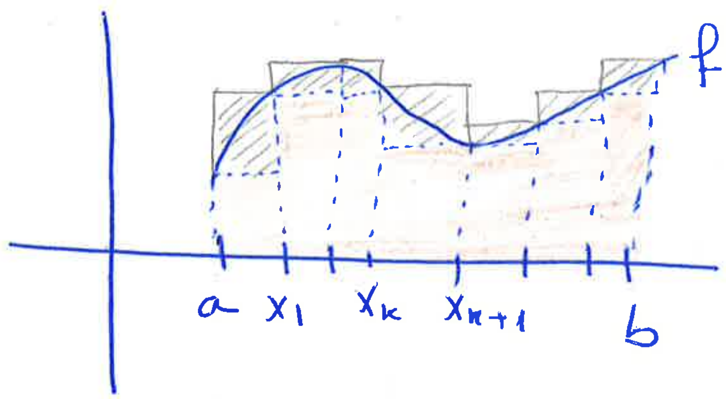


Ahora construimos dos colecciones distintas de rectángulos. A saber, en el subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$ construimos un rectángulo con base $[x_k, x_{k+1}]$ y altura $m_k = \min\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$,

y otro rectángulo con la misma base pero altura

$M_k = \max\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$.

Y hacemos lo mismo para cada uno de los subintervalos en que hemos descompuesto el intervalo $[a,b]$.



La suma de las áreas de los rectángulos inferiores, llamada suma inferior de Riemann viene dada por

$$s_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_{k+} - x_k)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{m_k}_{\text{altura}}$$

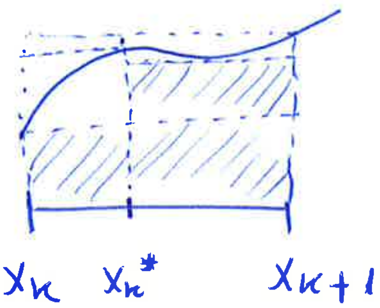
mientras que la suma de las áreas de los rectángulos superiores (suma superior de Riemann) es

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{M_k}_{\text{altura}}.$$

Obviamente, el área que queremos calcular y que siguiendo la notación de Leibniz y Fourier denotamos por $\int_a^b f(x)\,dx$, satisface

$$s_n(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S'_n(f).$$

¿Qué sucede si ahora descomponemos el intervalo $[a,b]$ en subintervalos de longitud más pequeña? (Técnicamente, esto se llama "refinar" la partición de $[a,b]$). Veámoslo sobre un intervalo pequeño $[x_k, x_{k+1}]$.



Cómo puede apreciarse, el área inferior aumenta mientras que el área superior disminuye. Pero como antes, nuestra área deseada queda atrapada entre ambas, es decir, si $m > n$, entonces

$$s_n(f) \leq s_m(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S'_m(f) \leq S'_n(f).$$

Si en el límite se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

entonces, se dice que f es integrable (en el sentido de Riemann) en $[a,b]$ y al valor (común) de dicho límite se le llama integral de f en $[a,b]$, denotado $\int_a^b f(x)\,dx$, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n(f) = \lim_{n\to\infty} S_n(f).$$

Dos preguntas surgen de un modo natural:

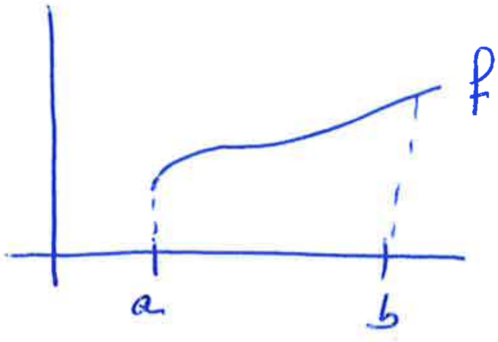
1) ¿Qué funciones son integrables?

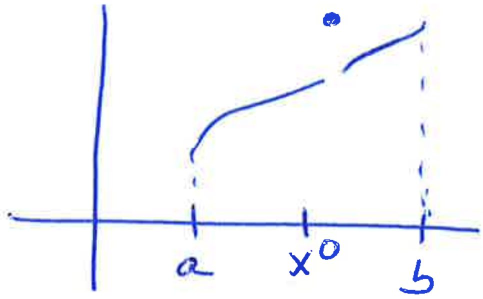
2) ¿Cómo se calcula, de una manera eficaz, la integral de una función?

Respuesta a la 1ª pregunta:

- Toda función continua es integrable
- Las funciones acotadas con un nº finito de discontinuidades de salto también son integrables.

Además, y esto es importante, dos funciones que difieran a lo sumo en un nº finito de puntos tienen, caso de existir, la misma integral.
¿Por qué?





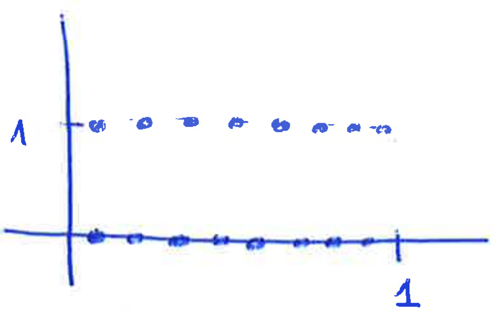
$$f(x) = g(x) \quad \forall\, x \neq x_0.$$

Entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$

"Un punto o un nº finito de puntos no contribuye al área".

¿Hay alguna función acotada que no sea integrable?

Sí, ~~mucho~~ pero son un poco raras. Por ejemplo,



$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

En cada subintervalo, por pequeño que sea, siempre hay un número racional y otro irracional. Por tanto,

$$\forall n \quad s_n(f) = 0 \quad y \quad S_n(f) = 1.$$

En el límite: $\lim_{n\to\infty} s_n(f) = 0$, $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = 1$.

Los límites son distintos y por tanto f no es integrable.

<u>Propiedades de las funciones integrables</u>

1) Linealidad: sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) Monotonía: sean f, g integrables y tales que

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Entonces, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

3) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable. Entonces,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

¿Cómo se calcula una integral?

- De forma analítica, haciendo uso de las primitivas y el Teorema Fundamental del Cálculo.

- Numéricamente, mediante fórmulas de cuadratura (trapezios, Simpson, etc...).

TEOREMA (Fundamental del Cálculo).

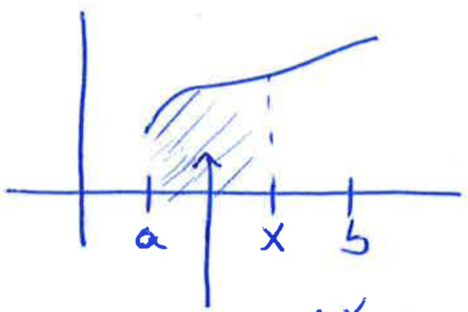
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Consideremos la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida como

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces, F es derivable en todo punto $x\in\,]a,b[$ y además,

$$F'(x)=f(x).$$

F se llama primitiva de f.



$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Consecuencias del T^a Fundamental del Cálculo

1) Cálculo de integrales. Regla de Barrow.

Si F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Para integrales "definidas", las fórmulas de integración por partes y cambio de variable sufren estos cambios:

* $\int_a^b u\,dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v\,du.$

Ejemplo:

$$\int_0^1 x e^x dx = \left| \begin{array}{l} x = u \to dx = du \\ e^x dx = dv \to v = e^x \end{array} \right|$$

$$= x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1$$

$$= e - e - (-1) = 1.$$

* $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x+1 = t^2 & \to x = 0 \to t = 1 \\ dx = 2t\,dt & \to x = 3 \to t = 2 \end{array} \right|$

$$= \int_{t=1}^{t=2} t \cdot 2t\,dt = 2\int_1^2 t^2 dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

2) Derivación de funciones definidas mediante integrales.

Como consecuencia del t$^{\underline{a}}$ fundamental del Cálculo y la regla de la cadena, se tiene que la función

$$F(x) = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\,dt$$

es derivable. Además,

$$F'(x) = f(h_2(x)) \cdot h_2'(x) - f(h_1(x))\, h_1'(x).$$

<u>Ejemplos</u>

1) $\displaystyle\int_0^{5x} e^{t^2}\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{5x} e^{t^2}\,dt = e^{(5x)^2} \cdot 5 = 5e^{25x^2}$$

2) $\displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{x} \frac{\log x}{t^3}\,dt$

$$\frac{d}{dx}\int_{\operatorname{sen} x}^{x} \frac{\log x}{t^3}\,dt = \frac{d}{dx}\left(\log x \int_{\operatorname{sen} x}^{x} \frac{dt}{t^3}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\int_{\operatorname{sen} x}^{x} \frac{dt}{t^3} + \log x\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot \cos x\right).$$

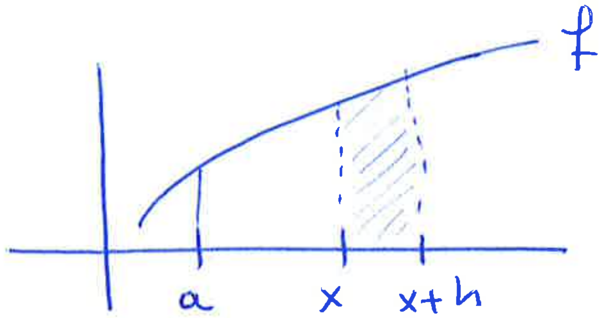
Idea de la demostración del T^a Fundamental del Cálculo.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Veamos que $F'(x) = f(x)$.

Se tiene:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$



Al ser f cont^a, en $[x, x+h]$ f alcanza un valor máximo y otro mínimo. Por tanto,

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+h} M_h\,dt = h \cdot M_h$$

donde $M_h = \max\{ f(t) : x \leq t \leq x+h \}$

y también

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt \geq \int_x^{x+h} m_h\,dt = h \cdot m_h$$

con $m_h = \min\{ f(t) : x \leq t \leq x+h \}$.

Se tiene pues

$$m_h \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq M_h.$$

Si tomamos límites cuando $h \to 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(x),$$ por ser f cont$^{\underline{a}}$.

y así se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

<u>Nota</u>. (sobre la regla de Barrow).

Recordemos que dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, se llama primitiva de f a toda función derivable $F(x)$ que cumple $F'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in\,]a,b[$.

En particular $\int_a^x f(t)\,dt$ es, por el T$^{\underline{a}}$ Fundamental, una primitiva de f.

Además, si $F(x)$ es una primitiva de f, entonces $G(x) = F(x) + c$, con c cte, también es una primitiva de f. Al usar la regla de Barrow, no importa que primitiva se use. En efecto:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c$$
$$= F(b) - F(a).$$

3) $T^{\underline{a}}$ del valor medio para integrales

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\text{cont}^{\underline{a}}$. Entonces, existe $c\in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

– Demostración:

Sea $F(x)$ una primitiva de f. Por ~~el $T^{\underline{a}}$ fundamental del Cálculo~~, la regla de Barrow,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Aplicamos el $T^{\underline{a}}$ del valor medio para derivadas a la función $F(x)$ y se tiene:

$$F(b)-F(a) = F'(c)\cdot(b-a)$$

$$= f(c)\cdot(b-a)$$

por el $T^{\underline{a}}$ Fundamental del Cálculo.

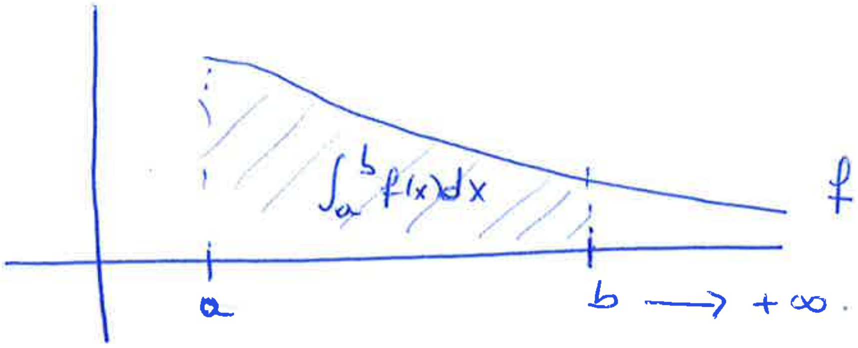
INTEGRALES IMPROPIAS

Nos ocupamos a continuación de integrales donde o bien la función que se integra (en un intervalo acotado) es no acotada, o bien el intervalo de integración es no acotado. Veamos ambos casos:

Caso 1: El intervalo de integración es no acotado.

Se definen:

- $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



- $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\,dx.$$

Si el valor de los límites anteriores es finito, la integral impropia se dice convergente. En caso contrario, se dice divergente.

Algunos ejemplos

1) La transformada de Laplace.

Dada $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, se define la transformada de Laplace de f como

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, si $f(t) = e^{\omega t}$, $\omega > 0$ fijo, entonces, para $s > \omega$.

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\omega t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{(\omega - s)t}\,dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{(\omega - s)t}\,dt$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{(\omega - s)t}}{\omega - s} \right]_0^b$$

$$= \frac{1}{\omega - s} \lim_{b \to +\infty} \left(e^{(\omega - s)b} - e^{(\omega - s)\cdot 0} \right)$$

$$= -\frac{1}{\omega - s} = \frac{1}{s - \omega}.$$

2) La transformada de Fourier seno (ó coseno).

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la transformada de Fourier seno de f como

$$\mathcal{F}_s(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} sen(\omega x)\, f(x)\, dx.$$

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{F}_s(f)(\omega) = \int_{0}^{+\infty} sen(\omega x)\, e^{-x}\, dx$$

Calculamos, en primer lugar, una primitiva de $sen(\omega x) e^{-x}$.

$$I = \int sen(\omega x) e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} sen(\omega x) = u \to \omega \cos(\omega x) dx = du \\ e^{-x} dx = dv \to v = -e^{-x} \end{array} \right|$$

$$= -e^{-x} sen(\omega x) + \omega \int \cos(\omega x) e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} \cos(\omega x) = u \to -\omega sen(\omega x) dx = du \\ e^{-x} dx = dv \to v = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= -e^{-x} sen(\omega x) + \omega \left\{ -e^{-x} \cos(\omega x) - \omega \int sen(\omega x) e^{-x} dx \right\}$$

Por tanto:

$$(1+\omega^2) I = -e^{-x}\left(sen(\omega x) + \omega \cos(\omega x)\right)$$

$$I = -\frac{1}{1+\omega^2} e^{-x} \left(sen(\omega x) + \omega \cos(\omega x)\right).$$

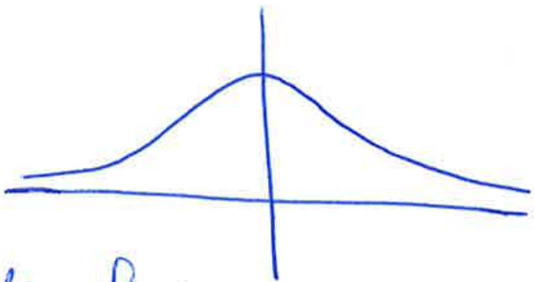
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{1+\omega^2}\lim_{b\to+\infty}\Big[e^{-x}\big(\mathrm{sen}(\omega x)+\omega\cos(\omega x)\big)\Big]_0^b$$

$$= \frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

3) La campana de Gauss en ~~Es~~ el Cálculo de Probabilidades

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Se define la media de f como

$$\mathbb{E}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\Big[-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^b$$

$$= \lim_{a\to+\infty}\Big[-1+e^{-\frac{a^2}{2}}\Big] + \lim_{b\to+\infty}\Big[-e^{-\frac{b^2}{2}}+1\Big]$$

$$= 0.$$

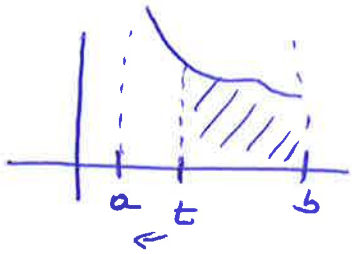
ingamac
periago07

CASO 2: el intervalo de integración es acotado pero la función que se integra no es acotada.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

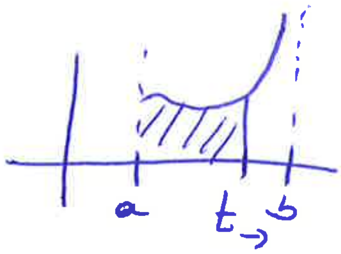
- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$



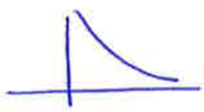
- Si $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=\pm\infty$, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$



Ejemplos

- $\cancel{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\to 0^-}}$



- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-1/2}\,dx$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_t^1$$

$$=\lim_{t\to 0^+} 2\left(1^{1/2}-t^{1/2}\right)$$

$$=2.$$

$$\cdot \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \Big[\log|x| \Big]_{-1}^{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \Big[\log|t| - \underbrace{\log|-1|}_{0} \Big]$$

$$= -\infty .$$

Se dice que la integral es divergente.

$$\cdot \int_0^1 \log x\,dx$$

$$\int \log x\,dx = \left| \begin{array}{l} \log x = u \to \frac{1}{x}\,dx = du \\ dx = dv \to v = x \end{array} \right|$$

$$= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log x - x .$$

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \log x\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \Big[x\log x - x \Big]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \Big[-1 - t\log t + t \Big]$$

$$= -1 - \lim_{t\to 0} t(\log t - 1)$$

$$= -1 \quad \text{ya que}$$

$$\lim_{t\to 0^+} t\,(\log t - 1) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\log t - 1}{\frac{1}{t}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} - \frac{t^2}{t} = 0.$$

Por tanto, $\int_0^1 \log x \, dx = -1.$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Objetivo.- Calcular de manera "aproximada" la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y tener una "estimación" del error cometido en dicha aproximación.

Planteamos el problema de la siguiente forma: dados un conjunto de nodos conocidos c_i, $1 \le i \le n$, calcular unos coeficientes a_i (también llamados pesos) de modo que

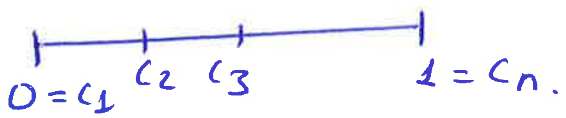
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^n a_i\, f(a + c_i(b-a)).$$

Para simplificar, supongamos que $[a,b] = [0,1]$.

Buscamos entonces pesos b_i tales que

$$\int_0^1 g(t)\,dt \simeq \sum_{i=1}^n b_i\, g(c_i) \qquad (*)$$

donde los nodos c_i, $1 \le i \le n$, se suponen conocidos.



Como tenemos n-incógnitas $(b_1, b_2, .., b_n)$ hemos de imponer n-ecuaciones. Parece razonable exigir que la fórmula anterior sea exacta para polinomios de grado $\leq n-1$, es decir,

$$\int_0^1 t^j dt = \left[\frac{t^{j+1}}{j+1} \right]_0^1 = \frac{1}{j+1}, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Por tanto, sustituyendo en la fórmula de cuadratura (*) $g(t) = t^j$, $0 \leq j \leq n-1$ se tiene:

$$\begin{array}{ll}
1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + \cdots + 1 \cdot b_n = 1 & g(t) = 1 \\
c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 + \cdots + c_n \cdot b_n = \frac{1}{2} & g(t) = t \\
c_1^2 \cdot b_1 + c_2^2 \cdot b_2 + \cdots + c_n^2 \cdot b_n = \frac{1}{3} & g(t) = t^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
c_1^{n-1} b_1 + c_2^{n-1} b_2 + \cdots + c_n^{n-1} b_n = \frac{1}{n} & g(t) = t^{n-1}.
\end{array}$$

que escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

La solución de este sistema, que es única si los c_j son distintos, nos proporciona los pesos buscados b_i.

Si regresamos al intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \dfrac{x-a}{b-a} & ; \; x = a \to t = 0 \\ dt = \dfrac{1}{b-a}\,dx & ; \; x = b \to t = 1 \end{array} \right| \to x = a + t(b-a)$$

$$= (b-a)\int_0^1 \underbrace{f(a+t(b-a))}_{g(t)}\,dt \approx (b-a)\sum b_i\, g(c_i)$$

Es decir, los pesos son ahora $a_i = (b-a)\, b_i$.

¿Qué error se comete siguiendo este procedimiento?

Haciendo uso del desarrollo de Taylor se puede probar que

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} a_i\, f(a + c_i(b-a)) =$$

$$= G_p\, f^{(p)}(\theta)\cdot(b-a)^{p+1} \qquad \text{con } \theta \in [a,b]$$

y donde
$$G_p = \frac{\dfrac{1}{p+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i\, c_i^{\,p}}{p!}, \quad p \geq n,$$

es decir G_p es el primer valor no nulo, $p \geq n$, de la expresión anterior.

Veamos algunos casos concretos:

1) <u>Fórmula del punto medio:</u>

$$c_1 = \frac{1}{2} \longrightarrow b_1 = 1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\, f\left(a + \frac{1}{2}(b-a)\right)$$

$$= (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

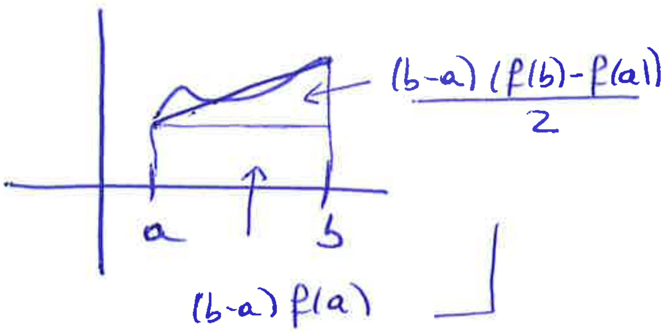
<u>Error:</u>

$$G_1 = \frac{\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{1}{2}}{1!} = 0,$$

$$G_2 = \frac{\frac{1}{3} - 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} \neq 0$$

2) <u>Fórmula de los trapezios</u>

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1.$$



$$(b-a)\left(\frac{f(b)}{2} + \frac{f(a)}{2}\right).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{array}{r} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \to b_1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right)$$

$$= \frac{(b-a)}{2}\,(f(a)+f(b)).$$

Error: $C_2 = \dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1}{2!} \neq 0.$

3) Fórmula de Simpson

$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1/3 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

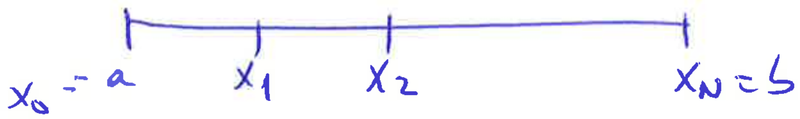
$$\left.\begin{array}{r} b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ \frac{b_2}{2} + b_3 = 1/2 \\ \frac{b_2}{4} + b_3 = 1/3 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} b_1 = \frac{1}{6} \\ b_2 = \frac{2}{3} \\ b_3 = \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left(\frac{f(a)}{6} + \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b)\right).$$

Error: $C_3 = 0$

$C_4 = -\frac{1}{2880} \neq 0$ orden 4.

<u>Nota</u>.- Para que las fórmulas anteriores sean útiles (es decir, que den poco error) es preciso que el intervalo de integración $[a,b]$ sea pequeño. En el caso de no serlo, descompondremos $[a,b]$ en una familia de intervalos pequeños



y, usando la aditividad de la integral, aplicaremos las fórmulas anteriores en cada sub-intervalo, es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx}_{\text{aproximación numérica.}}$$

<u>Ejemplo</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0.3413447460\ldots$$

- Fórmula de los trapecios para $N=1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \simeq \frac{(1-0)}{2}\left(e^0 + e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 0.320456502\ldots$$

- Fórmula de los trapecios para $N=10$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{9} \int_{x_j}^{x_{j+1}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$\simeq 0.3411$$